



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

Высшая математика

Часть 1

Ростов-на-Дону
2025

ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы и определители

1.1.1. Основные понятия

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы a_{ik} имеет два индекса: i – номер строки и k – номер столбца. Например, в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 8 & 1 \\ -3 & -4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

размера 3×4 , $a_{11} = 5$, $a_{23} = 8$, $a_{34} = 6$.

Часто используется краткая запись матрицы: $A = (a_{ik})_{m,n}$. Матрица называется **квадратной** n -го порядка, если она состоит из n строк и n столбцов. Матрица размера $1 \times n$ называется **матрицей-строкой**, а матрица размера $m \times 1$ **матрицей-столбцом**.

Нулевой матрицей O заданного размера называется матрица, все элементы которой равны 0.

Единичной называется квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны 1, а все остальные элементы равны 0:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно говорить о единичных матрицах любого порядка.

Транспонированной для матрицы A называется матрица A^T , строки которой являются столбцами матрицы A , а столбцы – строками A . Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -9 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ называются **равными**, если $a_{ik} = b_{ik}$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$.

1.1.2. Линейные операции над матрицами

Суммой матриц $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ называется матрица $A + B = (a_{ik} + b_{ik})_{m,n}$.

Другими словами, для сложения матриц надо сложить элементы матриц, стоящие на одних и тех же местах. Складываются матрицы только одинакового размера.

Произведением матрицы $A = (a_{ik})_{m,n}$ на число λ называется матрица $\lambda A = (\lambda a_{ik})_{m,n}$.

Другими словами, для умножения матрицы на число надо каждый элемент матрицы умножить на это число. Любую матрицу можно умножить на любое число.

Для любых матриц одинакового размера и любых чисел λ и μ выполняются свойства:

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1) $A + B = B + A$; | 4) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$; |
| 2) $A + 0 = A$; | 5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$; |
| 3) $A + (B + C) = (A + B) + C$; | 6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$. |

Пример 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу

$$C = 2A - 3B + A^T.$$

Решение.

$$C = 2A - 3B + A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

1.1.3. Умножение матриц

Матрицы умножаются по правилу «строка на столбец». Расшифруем, что имеется в виду.

Произведением матрицы $A = (a_{ik})_{m,p}$ на матрицу $B = (b_{ik})_{p,n}$ называется матрица C размера $m \times n$ с элементами $c_{ik} = \sum_{j=1}^p a_{ij} \cdot b_{jk}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Другими словами, для получения элемента, стоящего в i -той строке и k -том столбце матрицы-произведения, следует вычислить сумму произведений элементов i -той строки матрицы $A = (a_{ik})_{m,p}$ на k -тый столбец матрицы $B = (b_{ik})_{p,n}$.

В самом определении произведения матриц заложено, что число столбцов первой матрицы должно совпадать с числом строк второй. Это **условие согласования** матриц при умножении. Если оно нарушено, то матрицы перемножить нельзя.

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -2 & 28 \\ 11 & -1 & 20 \end{pmatrix}. \blacksquare$

Заметим, что вполне возможна ситуация, когда $A \cdot B$ существует, а $B \cdot A$ нет. Именно так происходит в примере 2. Кроме того, когда существуют оба произведения, то чаще всего они не равны, т.е., вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Приведем еще ряд свойств операции умножения матриц. Если A, B и C - квадратные матрицы одного порядка, то справедливы равенства:

- 1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
- 2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
- 3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- 4) $A \cdot E = E \cdot A = A$.

1.1.4. Определители

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц. Рассмотрим квадратную матрицу 2^{го} порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем 2^{го} порядка матрицы A называется число:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример 3. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$.

Решение. $\Delta(A) = -11 \cdot 12 - 4 \cdot 5 = -152$. ■

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица 3^{го} порядка.

Минором элемента a_{ik} называется определитель M_{ik} , составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания из матрицы i -той строки и k -того столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} называется число

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Определителем 3^{го} порядка (матрицы A) называется сумма произведений элементов первой строки матрицы на их алгебраические дополнения.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Пример 3. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение. Находим миноры и алгебраические дополнения элементов 1-ой строки матрицы:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 7, & A_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = +M_{11} = 7; \\ M_{12} &= \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 35, & A_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -35; \\ M_{13} &= \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7, & A_{13} &= (-1)^{1+3} M_{13} = +M_{13} = -7. \end{aligned}$$

Вычисляем исходный определитель

$$\Delta(A) = 3 \cdot 7 + (-2) \cdot (-35) + 4 \cdot (-7) = 63$$

В дальнейшем при вычислении определителей мы будем пользоваться более короткой записью:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 63. \blacksquare$$

Далее индуктивно вводится понятие определителей более высоких порядков.

Определителем n -го порядка называется сумма произведений элементов 1-ой строки на их алгебраические дополнения.

Свойства определителей

1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен 0.
3. Если две строки (два столбца) поменять местами, то определитель меняет знак.
4. Если элементы какой-либо строки (столбца) содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.
5. Если в определителе две строки (два столбца) одинаковы или пропорциональны, то определитель равен 0.

6. Справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

8. Сумма произведений элементов **любой** строки (столбца) на свои алгебраические дополнения равна самому определителю.
9. Сумма произведений элементов **любой** строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна 0.

Теорема 1. Если A и B – квадратные матрицы n -го порядка, то

$$\Delta(A \cdot B) = \Delta(A) \cdot \Delta(B).$$

Следствие. $\Delta(A \cdot B) = \Delta(B \cdot A).$

Пример 5. (Образец решения задачи 2 из контрольной работы). Даны матри-

цы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Проверить справедливость равенства

$$\Delta(A \cdot B) = \Delta(B \cdot A) = \Delta(A) \cdot \Delta(B).$$

Решение.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8 + 14 + 0 = 22$$

$$\Delta(B) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 40 - 30 = -75$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 2 \\ 16 & 5 & -3 \\ 6 & 18 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(A \cdot B) = \begin{vmatrix} -2 & 11 & 2 \\ 16 & 5 & -3 \\ 6 & 18 & 10 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 18 & 10 \end{vmatrix} - 11 \cdot \begin{vmatrix} 16 & -3 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 6 & 18 \end{vmatrix} = -208 - 1985 + 516 =$$

$= -1650$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 16 \\ -11 & 6 & 5 \\ 13 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(B \cdot A) = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 16 \\ -11 & 6 & 5 \\ 13 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 5 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 6 \\ 13 & 7 \end{vmatrix} = -10 + 840 - 2480 =$$

$= -1650$

Таким образом,

$$\Delta(A \cdot B) = \Delta(B \cdot A) = \Delta(A) \cdot \Delta(B) = -1650. \blacksquare$$

1.1.5. Обратные матрицы

Матрица A^{-1} называется обратной к квадратной матрице A , если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Матрица A называется **вырожденной**, если $\Delta(A) = 0$; в противном случае A – **невырожденная** матрица.

Для того, чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. $\Delta(A) \neq 0$.

В таком случае,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

т.е. обратная матрица есть разделенная на $\Delta(A)$ транспонированная матрица алгебраических дополнений элементов матрицы A .

Пример 6. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Найти A^{-1} .

Решение.

$$\begin{aligned} A_{11} &= + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -19 & A_{21} &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -11 & A_{31} &= + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{12} &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = -20 & A_{22} &= + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 33 & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17 \\ A_{13} &= + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6 & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -22 & A_{33} &= + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \end{aligned}$$

$$\Delta(A) = 5 \cdot (-19) + 1 \cdot (-20) + (-1) \cdot 6 = -121$$

и тогда, $A^{-1} = \frac{1}{-121} \cdot \begin{pmatrix} -19 & -11 & 2 \\ -20 & 33 & -17 \\ 6 & -22 & -7 \end{pmatrix}.$

Проверка.

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{121} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -19 & -11 & 2 \\ -20 & 33 & -17 \\ 6 & -22 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{121} \begin{pmatrix} -121 & 0 & 0 \\ 0 & -121 & 0 \\ 0 & 0 & -121 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично убеждаемся, что $A^{-1} \cdot A = E$. Значит, матрица A^{-1} найдена верно. ■
Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Если A и B невырожденные квадратные матрицы одинакового порядка, то

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему из 3-х алгебраических уравнений с 3-мя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1.1)$$

1.2.1. Метод Крамера

Теорема 3. Если определитель матрицы системы (1.1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

1.2.2. Матричный метод

Обозначим через A матрицу системы (1.1), т.е. матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

через $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – матрицу-столбец из неизвестных и через $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матрицу-столбец правых частей.

Принимая во внимание правило умножения матриц, можно систему линейных уравнений (1.1) записать в виде матричного уравнения:

$$A \cdot X = B,$$

решение которого имеет вид

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Пример 7. (Образец выполнения задачи 1 из контрольной работы) Решить систему уравнений двумя способами:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ 2x - 2y + z = 11 \\ 5x + 3y - 3z = -2 \end{cases}.$$

Решение. Используем метод Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -12, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 11 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -24,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 11 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 11 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-24}{-12} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{-12} = -3, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-12}{-12} = 1.$$

Проверим правильность полученных решений, для чего подставим их в условие:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 3 - 2 \cdot 1 = 1 \\ 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + 1 = 11 \\ 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 - 3 - 2 = 1 \text{ верно} \\ 4 + 6 + 1 = 11 \text{ верно} \\ 10 - 9 - 3 = -2 \text{ верно.} \end{cases}$$

Теперь решим ту же систему матричным методом. Найдём обратную матрицу

A^{-1} к матрице системы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Вычислим все алгебраические дополне-

ния:

11

Следовательно, $A^{-1} = \frac{1}{-12} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 11 & 1 & -7 \\ 16 & -4 & -8 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-12} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 11 & 1 & -7 \\ 16 & -4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-12} \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ 36 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Метод Крамера и матричный метод применимы для систем любого конечного порядка при двух условиях: количество уравнений совпадает с количеством неизвестных и определитель системы отличен от нуля.

1.2.3. Метод Гаусса

Пусть число уравнений системы совпадает с числом неизвестных¹.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.2)$$

¹ Это требование необязательно для метода Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \quad (1.3)$$

Расширенная матрица системы называется *верхнетреугольной*, если в матрице системы все элементы ниже главной диагонали равны нулю:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right) \quad (1.4)$$

Расширенную матрицу системы мы будем называть *диагональной*, если матрица системы представляет собой единичную:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b''_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b''_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b''_n \end{array} \right) \quad (1.5)$$

К элементарным преобразованиям расширенной матрицы системы относятся преобразования трех типов:

1) Перемена местами любых двух строк:

$$C_i \leftrightarrow C_j, \quad i \neq j.$$

2) Умножение любой строки на любое число, отличное от нуля

$$\alpha C_i, \quad \alpha \in R, \alpha \neq 0.$$

3) Прибавление к любой строке любой другой, умноженной на произвольное число:

$$C_i + \alpha C_j, \quad i \neq j, \quad \alpha \in R.$$

Известно, что элементарные преобразования расширенной матрицы системы приводят к эквивалентной матрице, т.е. система линейных алгебраических уравнений, соответствующая полученной матрице, имеет те же решения, что и исходная.

Идея метода Гаусса заключается в том, чтобы с помощью элементарных преобразований от расширенной матрицы системы вида (1.3) перейти вначале к верхнетреугольной матрице (1.4) (прямой ход метода Гаусса), а затем и к диагональной (1.5) (обратный ход метода Гаусса).

Если при переходе к верхнетреугольной матрице в матрице системы не возникло ни одной нулевой строки (это соответствует тому, что определитель исходной

системы отличен от нуля), то система имеет единственное решение. Его легко найти, исходя из диагонального вида: $x_1 = b_1'', \quad x_2 = b_2'', \dots, x_n = b_n''$.

Продemonстрируем на примерах технику использования элементарных преобразований.

Пример 8. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ x - 3y + 5z = 10 \end{cases}.$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & 10 \end{array} \right).$$

Выберем в первом столбце ведущий элемент, т.е. элемент, с помощью которого удобно будет сделать нули под ним. Таким числом является единица. Поменяем местами первую и третью строки ($C_1 \leftrightarrow C_3$ элементарное преобразование 1-го вида):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -3 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \end{array} \right).$$

С помощью элементарных преобразований 3-го типа делаем нули под ведущим элементом ($C_2 - 3C_1; C_3 - 2C_1$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 10 \\ 0 & 11 & -14 & -25 \\ 0 & 5 & -7 & -12 \end{array} \right).$$

Теперь выбираем ведущий элемент во втором столбце. Поскольку пока единицы нет, то её желательно создать. Для этого из второй строки вычтем удвоенную третью ($C_2 - 2C_3$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 10 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & -12 \end{array} \right).$$

Делаем нуль под ведущим элементом ($C_3 - 5C_2$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right).$$

Умножим третью строку на $(-\frac{1}{7})$ ($(-\frac{1}{7}) \cdot C_3$ – элементарное преобразование 2-го типа):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \end{array} \right).$$

Мы получили матрицу верхнетреугольного вида. Переходим к обратному ходу метода Гаусса. В качестве ведущего элемента выбираем единицу, стоящую в третьем столбце. Делаем нули над ней ($C_1 - 5C_3$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Последний шаг. С помощью единицы во втором столбце зануляем элемент над ней ($C_1 + 3C_2$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Получена матрица диагонального вида. Проверку полученного решения сделайте самостоятельно. Ответ: $x=2$, $y=-1$, $z=1$. ■

Если при переходе к верхнетреугольной матрице в матрице системы возникает хотя бы одна нулевая строка (это означает, что определитель исходной системы равен нулю), то система либо не имеет решения вовсе, либо имеет бесчисленное множество решений.

Пример 9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ -2x - 5y + 2z = -1 \\ x - 3y + 3z = 5 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{array} \right) C_1 \leftrightarrow C_3 & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -3 & 3 & 5 \\ -2 & -5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{matrix} C_2 + 2C_1 \\ C_3 - 3C_1 \end{matrix} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & \textcircled{-11} & 8 & 9 \\ 0 & 11 & -8 & -11 \end{array} \right) C_3 + C_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & -11 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Распишем последнюю строку полученной матрицы в виде уравнения:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -2$$

Очевидно, что это уравнение, а значит и вся система, решений не имеет. ■

Пример 10. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[C_3 - 5C_1]{C_2 - 4C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \textcircled{6} & -9 & -2 \\ 0 & 6 & -9 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{C_3 - C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

В отличие от предыдущего примера, последняя строка непротиворечива. Она указывает на то, что третье уравнение системы является следствием первых двух. Таким образом, мы, фактически, получили систему из двух уравнений с тремя неизвестными. Такая система имеет бесчисленное множество решений. Для того чтобы их найти, одну из переменных (её называют свободной) переносят в правую часть расширенной матрицы, а остальные переменные (их называют базисными или связными) выражают через эту свободную. Имеем

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1-2x_3 \\ 0 & 6 & -2+9x_3 \end{array} \right) \xrightarrow{C_2 \cdot \frac{1}{6}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1-2x_3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} + \frac{3}{2}x_3 \end{array} \right) \xrightarrow{C_1 + C_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x_3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} + \frac{3}{2}x_3 \end{array} \right).$$

Таким образом, $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x_3$, $x_2 = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2}x_3$, $x_3 = x_3$.

Это общее решение системы. Присваивая свободной переменной x_3 конкретные значения, можно получать частные решения, например,

$$\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0 \right), \left(-\frac{1}{3}; \frac{8}{3}; 2 \right) \text{ и т.д.}$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x_3; -\frac{1}{3} + \frac{3}{2}x_3; x_3 \right)$. ■

Отметим ещё одно достоинство метода Гаусса. Для систем линейных уравнений 4-го порядка и выше метод Гаусса оказывается эффективнее метода Крамера и матричного метода и приводит к решению гораздо быстрее.

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 = -1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \end{cases}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & -1 & 4 & -1 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 \leftrightarrow C_2 \\ \text{ } \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & 4 & -1 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - 2C_1 \\ C_3 - 3C_1 \\ C_4 - 5C_1 \\ \text{ } \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 11 & -7 & -5 & -19 \\ 0 & 14 & -8 & -16 & -32 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_4 - C_3 \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 11 & -7 & -5 & -19 \\ 0 & 3 & -1 & -11 & -13 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - 2C_4 \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 17 & 21 \\ 0 & 11 & -7 & -5 & -19 \\ 0 & 3 & -1 & -11 & -13 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 - 11C_2 \\ C_4 - 3C_2 \\ \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 21 \\ 0 & 0 & -29 & -192 & -250 \\ 0 & 0 & -7 & -62 & -76 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 \cdot (-1) \\ C_4 \cdot (-1) \\ \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 21 \\ 0 & 0 & 29 & 192 & 250 \\ 0 & 0 & 7 & 62 & 76 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 - 4C_4 \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 21 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -56 & -54 \\ 0 & 0 & 7 & 62 & 76 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_4 - 7C_3 \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -56 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 454 & 454 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_4 \cdot \frac{1}{454} \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -56 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - 3C_4 \\ C_2 - 17C_4 \\ C_3 + 56C_4 \\ \text{ } \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - 2C_3 \\ C_2 - 2C_3 \\ \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 + 2C_2 \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверку сделайте самостоятельно.

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 1$. ■

1.3. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$. Вычеркиванием каких-либо строк или столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k -го порядка, где $k \leq \min(m; n)$. Определители таких подматриц называются минорами k -го порядка матрицы A .

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Обозначают ранг матрицы обычно $\text{rang } A$ или $r(A)$.

Свойства ранга матрицы

- 1) Ранг матрицы $A_{m \times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $\text{rang } A \leq \min(m; n)$.
- 2) $\text{rang } A = 0$ тогда и только тогда, когда A – нулевая матрица.
- 3) Если A – квадратная матрица n -го порядка, то $\text{rang } A = n$ тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная.

Нахождение ранга матрицы, используя непосредственно определение, довольно громоздко и трудоемко.

Теорема 4. Ранг матрицы не изменяется при ее элементарных преобразованиях.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к верхнетреугольному виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1r} \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} \dots & a_{2r} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & a_{rr} \dots & a_{rn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$; $r \leq n$. Ранг верхнетреугольной матрицы равен r .

Пример 12. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Используя технику элементарных преобразований (как в методе Гаусса), получим верхнетреугольную матрицу:

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 - 3C_1 \\ C_3 - 4C_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \textcircled{-1} & 5 & -11 \\ 0 & -1 & 5 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -11 \\ 0 & -1 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $\text{rang } A = 2$. ■

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной зависимости (независимости) ее строк (столбцов).

Строка (столбец) называется линейно зависимыми, если хотя бы одна из строк (столбцов) линейно выражается через остальные. В противном случае, строки (столбцы) называются линейно независимыми (подробнее читайте в п. 1.6.1).

Теорема 5. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов).

1.4. Собственные векторы и собственные значения матрицы

Вектор $\bar{x} \neq 0$ называется собственным вектором матрицы A , если найдется такое число λ , что

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad (1.6)$$

Число λ называется собственным значением матрицы A , соответствующим вектору x .

Равенство (1.6) можно записать в развернутом виде:

[illegible]

Откуда получим

[illegible]

или в матричном виде

$$(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}.$$

Полученная система всегда имеет нулевое решение. Для существования ненулевого решения необходимо и достаточно, чтобы определитель системы обращался в нуль:

$$\Delta(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.7)$$

Определитель $\Delta(A - \lambda E)$ является многочленом n -ой степени. Он называется характеристическим многочленом матрицы A , а уравнение (1.7) – характеристическим уравнением матрицы A .

Теорема 6. *Корни характеристического уравнения матрицы A (если они существуют) и только они являются собственными значениями этой матрицы.*

Пример 13. *Найти собственные значения и собственные векторы матрицы:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\Delta(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 4 \\ -1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

откуда собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$.

Находим собственный вектор \bar{x}_1 , соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$. Для этого решаем матричное уравнение:

$$(A - \lambda_1 E) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $-x_1 - x_2 = 0$, т.е. $x_1 = -x_2$. Положив $x_2 = C$, мы получим, что вектор $\bar{x}_1 = (-C; C)$ при любом $C \neq 0$ является собственным вектором матрицы A с собственным значением $\lambda_1 = -2$. Аналогично, получим, что вектор $\bar{x}_2 = (-4C; C)$ при любом $C \neq 0$ является собственным вектором матрицы A с собственным значением $\lambda_2 = 1$. ■

Пример 14. *Найти собственные значения и собственные векторы матрицы:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. После преобразований (проделайте это самостоятельно) характеристическое уравнение примет вид:

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 81\lambda + 729 = 0.$$

Имеем далее

$$\lambda^2(\lambda - 9) - 81(\lambda - 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 9)(\lambda^2 - 81) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -9$.

Найдем собственный вектор \bar{x}_1 , соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 9$:

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим $\bar{x}_1 = \left(-\frac{1}{2}C_1 - C_2; C_1; C_2\right)$, где C_1 и C_2 произвольные числа не равные нулю одновременно.

Аналогично находим, что $\bar{x}_2 = \left(C_3; \frac{1}{2}C_3; C_3\right)$ при любом $C_3 \neq 0$ есть собственный вектор матрицы A с собственным значением $\lambda_2 = -9$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти $2A + 3B - B^T$, $A \cdot B$, $B \cdot A$

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Вычислить определители:

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Проверить справедливость равенств $\Delta(AB) = \Delta(BA) = \Delta A \cdot \Delta B$:

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

11. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Найти A^{-1} и сделать проверку:

$$13. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad 14. A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 16. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Проверить справедливость равенства $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$:

$$17. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad 18. A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$19. A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решить системы методом Крамера и матричным методом:

$$21. \begin{cases} 2x + 4y + z = 5 \\ 4x - 5y - z = 1 \\ -x + 3y + 3z = 8 \end{cases} \quad 22. \begin{cases} x + 3y + 5z = 7 \\ 2x - 5y + 2z = 3 \\ 4x - 7y - 4z = 9 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases} \quad 24. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 8 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 5x + y - 2z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \quad 26. \begin{cases} 4x + 5y + z = 6 \\ -x + 2y + 3z = 5 \\ 7x - 4y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 9 \\ -4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases} \quad 28. \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} -x + 2y + z = 4 \\ 2x - 5y + 2z = 3 \\ 4x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + 2z = 12 \\ 4x + 3y - 3z = 9 \end{cases}$$

Решить системы методом Гаусса:

$$31. \begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ 5x - y + 4z = 6 \\ 4x - 2y - 3z = 6 \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} 4x + y + 2z = 5 \\ -x + 2y + z = 1 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 4x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 5z = 3 \\ 7x + y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} -2x + y + 5z = -1 \\ 3x + 4y - 2z = 2 \\ x + 5y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} 3x - y - 2z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = -1 \\ 5x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} 4x + y + 3z = 1 \\ -x + 4y + z = 5 \\ 3x + 5y + 4z = 6 \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 5 \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 3 \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 3 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -2 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \\ -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

Найти ранг матрицы A :

$$45. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$46. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$47. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$48. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$49. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$50. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$51. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$52. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$53. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$54. A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ -3 & 5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A :

$$55. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$56. A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$57. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$58. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$59. A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$60. A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$61. A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$62. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5. Примеры использования алгебраического аппарата для классических экономических моделей.

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Макроэкономика функционирования межотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль, с одной стороны, является производителем, а с другой – потребителем продукции, выпускаемой другими отраслями. Возникает задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида. Впервые эта проблема была сформулирована в виде математической модели в 1936 г. американским экономистом В.В. Леонтьевым. Модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа.

Предполагается, что производственная сфера хозяйства представляет собой n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт. Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Как правило, рассматривается процесс производства за один год. Обозначим

X_i - общий объем продукции i -й отрасли (ее валовой выпуск);

x_{ij} - объем продукции i -й отрасли, потребляемый j -й отраслью при производстве объема продукции x_i ;

y_i - объем продукции i -й отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере (удовлетворение потребностей населения, содержание государственных институтов и т.д.).

Балансовый принцип связи различных отраслей состоит в том, что валовой выпуск i -й отрасли должен быть равен сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах. *Балансовые соотношения* могут быть выражены линейными уравнениями:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{im} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.8)$$

В основу модели Леонтьева лег установленный им факт, что в течении длительного времени уровень технологии производства остается неизменным, откуда следует, что $a_{ij} = x_{ij}/x_j$ - объем потребления j -й отраслью продукции i -й отрасли при производстве объема продукции x_j - есть технологическая константа. При таком допущении технология производства принимается линейной, а само допущение называется *гипотезой линейности*. При этом числа a_{ij} называются *коэффициентами прямых затрат*. Таким образом, учитывая что $x_{ij} = a_{ij}x_j$ для $i, j = 1, 2, \dots, n$, уравнения (1.8) имеют вид:

[illegible]

Систему (1.9) можно записать в матричном виде, называемом *уравнением линейного межотраслевого баланса*:

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}, \quad (1.10)$$

где $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор валового выпуска, $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ - вектор конечного потребления,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов прямых затрат.

Уравнение (1.10) можно использовать в двух целях: для вычисления неизвестного вектора валового выпуска \bar{x} или для нахождения вектора конечного потребления \bar{y} .

Матрица A , все элементы которой неотрицательны, называется *продуктивной*, если для любого вектора \bar{y} с неотрицательными компонентами существует решение уравнения (1.10) – вектор \bar{x} , все элементы которого неотрицательны. В этом случае модель Леонтьева называется *продуктивной*.

Требование неотрицательности элементов матрицы A и векторов \bar{x} и \bar{y} вполне естественно вытекает из прикладного характера поставленной задачи. Впредь будем считать, что матрица A и векторы \bar{x} и \bar{y} удовлетворяют данному требованию.

Известно, что *если для матрицы A и некоторого вектора \bar{y} уравнение (1.10) имеет решение \bar{x} , то матрица A продуктивна.*

Таким образом, для определения продуктивности матрицы A достаточно установить наличие положительного решения системы (1.10) хотя бы для одного положительного вектора \bar{y} .

Перепишем систему (1.10) с использованием единичной матрицы E :

$$(E - A)\bar{x} = \bar{y}. \quad (1.11)$$

Если существует обратная матрица $(E - A)^{-1}$, существует единственное решение уравнения (1.11):

$$\bar{x} = (E - A)^{-1} \bar{y}. \quad (1.12)$$

Матрица $(E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*.

Теорема (первый критерий продуктивности). *Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда существует матрица полных затрат и ее элементы неотрицательны.*

Теорема (второй критерий продуктивности). *Матрица A продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы:*

$$\sum_{i(j)=1}^n a_{ij} \leq 1,$$

причем хотя бы для одного столбца (строки) неравенство строгое.

Пример 15. Дана матрица коэффициентов прямых затрат, вектор валового выпуска для трех отраслей промышленности за истекший год и планируемый на следующий год вектор конечного потребления. Найти вектор конечного потребления за истекший период. Определить объем валового выпуска каждого вида продукции на следующий год.

№	Отрасль	Потребление			Валовой выпуск	Планируемый конечный продукт
		1	2	3		
1	Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	100	60
2	Энергетика	10	10	20	100	70
3	Машиностроение	20	10	10	50	30

Решение. Выпишем вектор валового выпуска и матрицу коэффициентов прямых затрат:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,40 \\ 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что матрица A удовлетворяет второму критерию продуктивности.

Для определения вектора конечного потребления за истекший период используем уравнение (1.11). Имеем:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0,95 & -0,35 & -0,40 \\ -0,10 & 0,90 & -0,40 \\ -0,20 & -0,10 & 0,80 \end{pmatrix}.$$

Находим вектор конечного продукта за истекший период:

$$\bar{y} = (E - A)\bar{x} = \begin{pmatrix} 0,95 & -0,35 & -0,40 \\ -0,10 & 0,90 & -0,40 \\ -0,20 & -0,10 & 0,80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Для ответа на второй вопрос – определение объема валового выпуска каждого вида продукции на следующий год, используем формулу (1.12). Сначала вычислим матрицу прямых затрат:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,514} \begin{pmatrix} 0,68 & 0,32 & 0,50 \\ 0,16 & 0,68 & 0,42 \\ 0,19 & 0,165 & 0,82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,32 & 0,62 & 0,97 \\ 0,31 & 1,32 & 0,81 \\ 0,37 & 0,32 & 1,60 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{x} = (E - A)^{-1} \bar{y} = \begin{pmatrix} 1,32 & 0,62 & 0,97 \\ 0,31 & 1,32 & 0,81 \\ 0,37 & 0,32 & 1,60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 152,1 \\ 135,8 \\ 92,5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, чтобы выполнить план по выпуску конечного продукта, нужно увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,1%, уровень энергетики – на 35,8% и выпуск продукции машиностроения – на 85% по сравнению с прошедшим годом. ■

Рассмотрим *линейную модель обмена* или *модель международной торговли*, отражающую процесс взаимных закупок товаров. Будем полагать, что бюджеты n стран, которые мы обозначим соответственно x_1, x_2, \dots, x_n , расходуются на покупку товаров. Пусть a_{ij} - доля бюджета x_j , которую j -я страна тратит на покупку товаров у i -й страны и A - матрица коэффициентов a_{ij} . Тогда, если весь бюджет расходуется только на закупки внутри страны и вне ее (торговый бюджет), то справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1. \quad (1.13)$$

Матрица A со свойством (1.13), в силу которого сумма элементов ее любого столбца равна единице, называется *структурной матрицей торговли*.

Для i -й страны общая выручка от внутренней и внешней торговли выражается формулой

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.14)$$

Условие сбалансированной (бездефицитной) торговли: для каждой страны ее бюджет не должен превышать выручки от торговли, т.е. $x_i \leq P_i$, или

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.15)$$

В условиях нашей модели неравенства обращаются в равенства. Действительно, если сложить все эти неравенства и сгруппировать по x_j , а также применить свойство (1.13), получим

$$x_1(a_{11}+a_{21}+\dots+a_{n1})+x_2(a_{12}+a_{22}+\dots+a_{n2})+\dots x_n(a_{1n}+a_{2n}+\dots+a_{nn})=x_1+x_2+\dots+x_n.$$

Таким образом, условия (1.15) принимают вид системы линейных уравнений:

[illegible]

Если ввести вектор бюджетов \bar{x} , то систему (1.16) можно записать в матричном виде

$$A\bar{x} = \bar{x}. \quad (1.17)$$

Это уравнение означает, что собственный вектор структурной матрицы A , отвечающий ее собственному значению $\lambda = 1$, состоит из бюджетов стран бездефицитной международной торговли.

Для определения \bar{x} будем использовать уравнение (1.17) в виде:

$$(A - E)\bar{x} = \bar{0}. \quad (1.18)$$

Пример 16. Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов равна 6270 д.е.

Решение. Из уравнения (1.18) имеем систему:

$$\begin{cases} -0,8x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3 + 0,2x_4 = 0 \\ 0,4x_1 - 0,7x_2 + 0,1x_3 + 0,2x_4 = 0 \\ 0,3x_1 + 0,3x_2 - 0,5x_3 + 0,2x_4 = 0 \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 - 0,6x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ранг матрицы этой системы равен трем, значит, одна из неизвестных является свободной, а остальные выражаются через нее. Решить эту систему можно методом Гаусса (проделайте самостоятельно!). Найденные компоненты собственного вектора \bar{x} имеют вид:

$$x_1 = \frac{140}{121}c, \quad x_2 = \frac{146}{121}c, \quad x_3 = \frac{20}{11}c, \quad x_4 = c.$$

Приравниваем сумму найденных значений к заданной сумме бюджетов:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{627}{121}c = 6270 \Rightarrow c = 1210.$$

Окончательно получаем искомые величины бюджетов стран при бездефицитной торговле (в д.е.):

$$x_1 = 1400, \quad x_2 = 1460, \quad x_3 = 2200, \quad x_4 = 1210. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Убедиться, что модель Леонтьева продуктивна. Найти вектор конечного продукта для нового вектора валового выпуска $\bar{x} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$. Найти вектор валового выпуска для нового вектора конечного продукта $\bar{y} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	500	400	200	600	700	800	900	700	900	200
x_2	700	900	300	300	400	300	300	600	600	900
x_{11}	50	30	45	20	75	85	150	120	200	100
x_{12}	100	40	90	80	125	95	70	150	400	75
x_{21}	60	70	100	70	70	170	40	80	20	50
x_{22}	90	120	70	100	150	100	120	75	125	120
d	400	200	600	700	800	900	700	600	200	500
e	900	300	300	400	300	400	600	900	700	700
f	800	900	700	600	200	500	400	200	600	700
g	300	400	600	900	700	700	900	300	300	400

2. Структурная матрица торговли двух стран имеет вид: $A = \begin{pmatrix} d & f \\ e & g \end{pmatrix}$. Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие условию сбалансированной бездефицитной торговли при $x_1 + x_2 = h$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	0,2	0,3	0,1	0,8	0,4	0,3	0,7	0,1	0,7	0,2
e	0,8	0,7	0,9	0,2	0,6	0,7	0,3	0,9	0,3	0,8
f	0,6	0,2	0,4	0,3	0,2	0,1	0,9	0,3	0,8	0,4
g	0,4	0,8	0,6	0,7	0,8	0,9	0,1	0,7	0,2	0,6
h	800	900	700	600	200	500	400	300	650	750

1.6. Пространства R^n .

Обозначим через R^n множество упорядоченных наборов по n действительных чисел: $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $n \in N$. Сами такие наборы называются n -мерными векторами.

Рассмотрим n -мерные векторы $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Два вектора \bar{a} и \bar{b} называются равными, если равны их соответствующие координаты: $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Введем на множестве R^n линейные операции.

Суммой двух векторов \bar{a} и \bar{b} называется вектор, координаты которого равны суммам соответствующих координат векторов \bar{a} и \bar{b} :

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

Произведением вектора \bar{a} на действительное число λ называется вектор, координаты которого равны произведению числа λ на соответствующие координаты вектора \bar{a} :

$$\lambda \bar{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

Линейные операции над векторами удовлетворяют свойствам:

$$1. \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$$

$$5. 1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$$

$$2. \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$$

$$6. \lambda \cdot (\mu \cdot \bar{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \bar{a}$$

$$3. \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$$

$$7. \lambda \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}$$

$$4. \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$$

$$8. (\lambda + \mu) \cdot \bar{a} = \lambda \cdot \bar{a} + \mu \cdot \bar{a}$$

где λ, μ - произвольные действительные числа, $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ - нулевой вектор, $(-\bar{a}) = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ - вектор, противоположный к вектору \bar{a} .

Множество R^n , с введенными на нем линейными операциями, называется **пространством R^n** .

Если линейные операции удовлетворяют указанным выше восьми свойствам, то соответствующее пространство называется линейным или векторным пространством. Таким образом, пространство R^n **является векторным пространством**.

Заметим, что элементами некоторых пространств могут быть не только векторы, но и различные другие объекты. Так, например, линейным пространством является множество всех квадратных матриц одинакового размера (объясните почему!). Несложно показать, что линейным будет пространство всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа n (проверьте выполнение свойств 1-8). В тоже время, множество всех многочленов фиксированной степени не является линейным пространством, т.к. сумма двух таких многочленов может оказаться многочленом более низкой степени.

1.6.1. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов

Вектор \bar{a} называется линейной комбинацией векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$, если найдутся действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ такие, что:

$$\bar{a} = \alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k.$$

Система векторов называется линейно зависимой, если хотя бы один из векторов системы является линейной комбинацией остальных.

Если ни один из векторов системы не представляется как линейная комбинация других, то система называется линейно независимой.

Линейная зависимость векторов в R^2 означает их коллинеарность (параллельность). Любая пара неколлинеарных векторов является линейно независимой.

Линейная зависимость трех векторов в R^3 означает их компланарность (принадлежность одной плоскости).

Теорема 7. Система векторов $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ – линейно независима в R^n тогда и только тогда, когда уравнение:

$$x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \dots + x_n \bar{a}_n = \bar{0}$$

имеет только тривиальное решение, т.е. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Система линейно зависима тогда и только тогда, когда данное уравнение имеет не тривиальное решение, т.е. $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$.

Теорема 8. (Критерий линейной зависимости (независимости) системы из двух векторов).

Два вектора \bar{a} и \bar{b} линейно зависимы (линейно независимы) тогда и только тогда, когда все их соответствующие координаты пропорциональны (непропорциональны).

Пример 17. Выяснить, являются ли линейно зависимыми векторы $\bar{a} = (1, 4, -2, 3)$ и $\bar{b} = (2, 8, -4, 6)$.

Решение. Определим, пропорциональны ли координаты векторов:

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} - \text{верно.}$$

Следовательно, векторы \bar{a} и \bar{b} линейно зависимы. ■

Теорема 9. (Критерий линейной зависимости (независимости) системы из n векторов в пространстве R^n).

Системы векторов $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ – линейно зависима (линейно независима) в R^n тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат этих векторов, равен нулю (отличен от нуля).

Пример 18. Определить, являются ли линейно зависимыми вектора

$$\bar{a} = (3, -2, 1), \quad \bar{b} = (4, 1, -3) \quad \text{и} \quad \bar{c} = (2, -3, -1)?$$

Решение. Составим и вычислим определитель из координат векторов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1 - 9) + 2(-4 + 6) + 1(-12 - 2) = -40$$

Т.к. $\Delta \neq 0$, то векторы \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} – линейно независимы. ■

Теорема 10. Любые $n + 1$ векторов линейно зависимы в пространстве R^n .

Замечание. Остается рассмотреть ситуацию, когда количество векторов в системе больше двух, но меньше n (например, три вектора в пространстве R^4). Итак, выясним линейную зависимость (независимость) системы $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k\}$ в пространстве R^n , где $2 < k < n$. Рассмотрим матрицу A , составленную из координат этих векторов, и вычислим ее ранг. С учетом теоремы 5, делаем вывод: если $\text{rang } A = k$, то система линейно независима, а если $\text{rang } A < k$, то система $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k\}$ – линейно зависима.

1.6.2. Базисы в пространствах R^n .

Система векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ называется базисом пространства R^n , если любой вектор $\bar{a} \in R^n$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы:

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n.$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называют коэффициентами разложения вектора \bar{a} по базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$.

В пространстве R^2 примером базиса может служить система единичных ортов: $\{\bar{i}, \bar{j}\}$. Данный базис принято называть *естественным*, т.к. коэффициентами разложения любого вектора \bar{a} по базису $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ являются координаты этого вектора. Например, $\bar{a} = (2, 5) = 2\bar{i} + 5\bar{j}$.

В пространстве R^3 естественный базис образует система векторов $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Теорема 11. Если система векторов образует базис в R^n , то она линейно независима.

Теорема 12. Любые n линейно независимых векторов пространства R^n образуют в нем базис.

Пример 19. (Образец решения задачи 3 из контрольной работы). Даны векторы $\bar{a} = (2, -1, 2)$, $\bar{b} = (-3, 1, -1)$, $\bar{c} = (1, -2, -3)$. Определить образуют ли векторы \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} базис в пространстве R^3 и если да, то разложить вектор $\bar{d} = (17, -15, -7)$ по этому базису.

Решение. Составим определитель из векторов \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 10$$

Т.к. $\Delta \neq 0$, то система $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ - линейно независима и по теореме 12 образует базис в пространстве R^3 . Значит, вектор \bar{d} может быть единственным образом представлен в виде:

$$\bar{d} = x \cdot \bar{a} + y \cdot \bar{b} + z \cdot \bar{c}$$

с пока неизвестными коэффициентами x, y, z . Переходя от равенства векторов к равенству их соответствующих координат приходим к системе линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 17 \\ -15 \\ -7 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

откуда:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 17 \\ -x + y - 2z = -15 \\ 2x - y - 3z = -7 \end{cases}$$

Решая эту систему, например, методом Крамера (сделайте это самостоятельно), получим: $x = 3$, $y = -2$, $z = 5$. Следовательно,

$$\bar{d} = 3\bar{a} - 2\bar{b} + 5\bar{c} . \blacksquare$$

1.6.3. Скалярное произведение векторов. Норма вектора

Скалярным произведением вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ на вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называется число

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n.$$

Свойства скалярного произведения

Для любых $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R^n$ и для любого числа λ справедливо:

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;
2. $\lambda \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} = \lambda \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b})$;
3. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$;
4. $\bar{a} \cdot \bar{a} \geq 0$, причем $\bar{a} \cdot \bar{a} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$.

Нормой вектора $\bar{a} \in R^n$ называется арифметический корень из скалярного произведения вектора \bar{a} на себя:

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

С геометрической точки зрения, норма вектора – это его длина.

Свойства нормы

Для любых \bar{a}, \bar{b} и для любого числа λ справедливо:

1. $\|\bar{a}\| \geq 0$, причем $\|\bar{a}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$;
2. $\|\lambda \bar{a}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{a}\|$;
3. $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|$ - неравенство Коши-Буняковского;
4. $\|\bar{a} + \bar{b}\| \leq \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|$ - неравенство треугольника;

Углом между векторами \bar{a} и \bar{b} называется число $\varphi \in [0, \pi]$, определяемое равенством:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}.$$

Откуда следует, что:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi,$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. В этом состоит геометрический смысл скалярного произведения.

Векторы \vec{a} и \vec{b} называются ортогональными (перпендикулярными), если угол между ними $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Значит,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Пример 20. При каком значении x векторы $\vec{a} = (2, 3, x)$ и $\vec{b} = (x, -1, 5)$ ортогональны?
Решение.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

т.е.

$$2x - 3 + 5x = 0 \Rightarrow 7x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{7}.$$

Ответ: $\vec{a} \perp \vec{b}$ при $x = \frac{3}{7}$. ■

1.6.4. Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор \vec{c} , удовлетворяющий трем условиям (рис. 1):

- 1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 2) длина вектора \vec{c} численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} ;
- 3) векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} образуют правую тройку, т.е. если смотреть из конца вектора \vec{c} , то кратчайший поворот от вектора \vec{a} к вектору \vec{b} должен происходить против часовой стрелки.

Свойства векторного произведения

Для любых векторов для любых \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и для любого числа λ справедливо:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. $\lambda \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
4. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$;

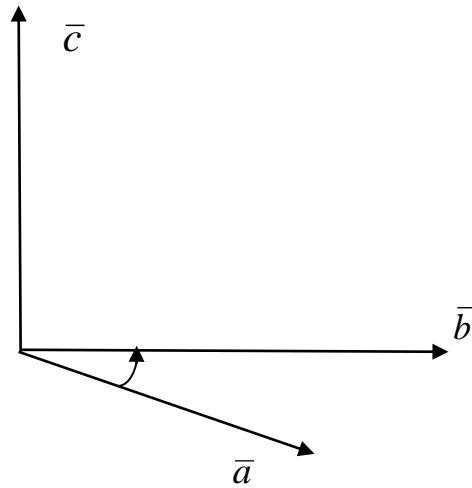


Рис. 1

5. Таблица умножения ортов:

$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k},$	$\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i},$	$\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j},$
$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k},$	$\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i},$	$\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j},$
$\bar{i} \times \bar{i} = 0,$	$\bar{j} \times \bar{j} = 0,$	$\bar{k} \times \bar{k} = 0.$

6. Если $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение часто используют для нахождения площадей.

Пример 21. Найти площадь треугольника с вершинами $A(5, -1, 2)$, $B(3, -4, -2)$, $C(-2, 3, 5)$.

Решение. Найдем координаты векторов \overline{AB} и \overline{AC} (напомним, что для этого нужно из координат конца вектора вычесть координаты начала):

$$\overline{AB} = (-2; -3; -4), \quad \overline{AC} = (-7; 4; 3)$$

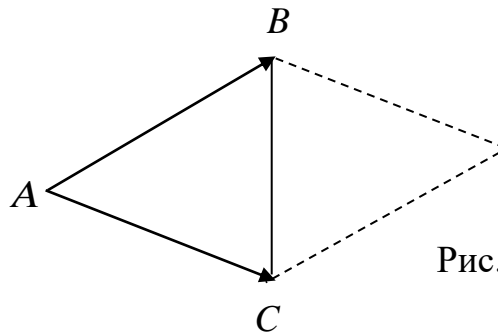


Рис. 2

Учитывая, что норма векторного произведения векторов \overline{AB} и \overline{AC} численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 2), для нахождения площади треугольника достаточно будет площадь параллелограмма разделить на два.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\|\overline{AB} \times \overline{AC}\|}{2},$$

$$\|\overline{AB} \times \overline{AC}\| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3 & -4 \\ -7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 34\vec{j} - 29\vec{k} = (7, 34, -29).$$

$$\|\overline{AB} \times \overline{AC}\| = \sqrt{7^2 + 34^2 + (-29)^2} = \sqrt{2046}$$

Таким образом, $S_{\Delta} = \frac{\sqrt{2046}}{2}$. ■

1.6.5. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} (в указанном порядке) называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Свойства смешанного произведения векторов

Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} справедливо:

- 1) При перестановке местами двух множителей смешанное произведение меняет знак:

$$\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}, \quad \vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}, \quad \vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

- 2) При циклической перестановке множителей смешанное произведение не меняется:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

- 3) Если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

- 4) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$, \vec{b} и \vec{c} компланарны, т.е. лежат в одной плоскости.

- 5) Абсолютная величина смешанного произведения векторов равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах

$$V_{\text{парал.}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Объем пирамиды, построенный на тех же векторах в 6 раз меньше:

$$V_{\text{пирам.}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|.$$

Таким образом, скалярное произведение используют для нахождения длин и углов, векторное произведение – для вычисления площадей, а смешанное – для нахождения объемов.

Пример 22. (Образец выполнения задачи 4 из контрольной работы). Даны вершины пирамиды: $A(-4,1,-3)$, $B(2,-5,1)$, $C(3,4,3)$ и $D(5,2,-4)$.

Найти:

- длину ребра BD ;
- угол между ребрами AB и AC ;
- площадь грани BCD ;
- объем пирамиды.

Решение.

- а) Найдем вектор \overrightarrow{BD} , а затем его норму. Это и будет длина ребра BD . $\overrightarrow{BD} = (3,7,-5)$,

$$\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{3^2 + 7^2 + (-5)^2} = \sqrt{83}$$

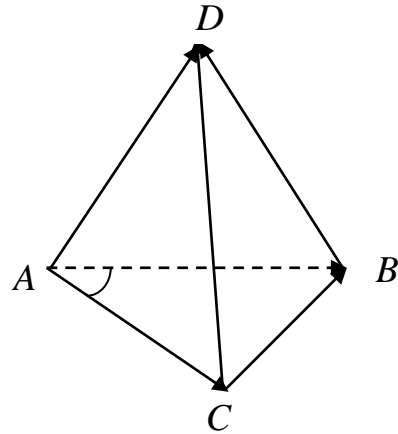


Рис. 3

- б) Угол между ребрами AB и AC будем находить как угол между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} (рис. 3), используя формулу:

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|}.$$

$$\overrightarrow{AB} = (6; -6; 4), \quad \overrightarrow{AC} = (7; 3; 6),$$

$$\cos \varphi = \frac{6 \cdot 7 - 6 \cdot 3 + 4 \cdot 6}{\sqrt{36 + 36 + 16} \sqrt{49 + 9 + 36}} = \frac{48}{\sqrt{88} \sqrt{94}} = \frac{48}{4\sqrt{517}} = \frac{12}{\sqrt{517}}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos \frac{12}{\sqrt{517}}.$

в) $S_{\triangle BCD} = \frac{\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\|}{2}$, $\overrightarrow{BC} = (1, 9, 2)$, $\overrightarrow{BD} = (3, 7, -5)$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 9 & 2 \\ 3 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -59\vec{i} + 11\vec{j} - 20\vec{k} = (-59, 11, -20)$$

$$\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\| = \sqrt{(-59)^2 + 11^2 + (-20)^2} = \sqrt{4002}, \quad S_{\triangle BCD} = \frac{\sqrt{4002}}{2}.$$

- г) Возьмем три вектора, на которых построена пирамида, например, $\overrightarrow{AB} = (6, -6, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (7, 3, 6)$ и $\overrightarrow{AD} = (9, 1, -1)$, и найдем их смешанное произведение:

$$\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD} = \begin{vmatrix} 6 & -6 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \\ 9 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -500.$$

Значит, $V_{\text{пирам.}} = \frac{1}{6} |\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}| = \frac{1}{6} |-500| = \frac{250}{3}$. ■

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Проверить линейную зависимость (независимость) векторов

1. $\bar{a} = (1; 3)$, $\bar{b} = (-2; -6)$
2. $\bar{a} = (1; 5)$, $\bar{b} = (0; 2)$
3. $\bar{a} = (-1; 4; 3)$, $\bar{b} = (0; 7; 2)$
4. $\bar{a} = (5; 2; -1; 4)$, $\bar{b} = (-10; -4; 2; -8)$
5. $\bar{a} = (1; -1; 2)$, $\bar{b} = (0; 3; 5)$, $\bar{c} = (1; 2; 10)$
6. $\bar{a} = (2; 3; -1)$, $\bar{b} = (4; -1; 2)$, $\bar{c} = (7; 1; 8)$
7. $\bar{a} = (1; 2; 0; -1)$, $\bar{b} = (4; -1; 3; 2)$, $\bar{c} = (5; 1; 3; 1)$
8. $\bar{a} = (-1; 3; 1; 0)$, $\bar{b} = (2; 1; 4; -2)$, $\bar{c} = (3; -1; 0; 5)$

Доказать, что векторы $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ образуют базис в R^2 и разложить по этому вектор \bar{c}

9. $\bar{a} = (1; -2)$, $\bar{b} = (3; 1)$, $\bar{c} = (-7; -7)$
10. $\bar{a} = (2; -1)$, $\bar{b} = (-1; 1)$, $\bar{c} = (4; -1)$

Доказать, что векторы $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ образуют базис в R^3 и разложить по этому базису вектор \bar{d}

11. $\bar{a} = (3; 0; 2)$, $\bar{b} = (1; -1; -2)$, $\bar{c} = (2; 1; 2)$, $\bar{d} = (3; -3; -4)$
12. $\bar{a} = (-1; 1; 2)$, $\bar{b} = (2; 0; 2)$, $\bar{c} = (3; -1; 1)$, $\bar{d} = (-6; 4; 4)$

Найти внутренние углы и длины всех сторон $\triangle ABC$

13. $A(1; 0; 1)$, $B(4; -1; 2)$, $C(7; 4; 3)$
14. $A(-1; 2; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(4; 3; 5)$

Определить при каком x векторы \bar{a} и \bar{b} ортогональны

15. $\bar{a} = (1; 2; x)$, $\bar{b} = (2 - x; 3; 7)$
16. $\bar{a} = x\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - x\bar{k}$

17. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\bar{a} = (-4; 1; 2) \text{ и } \bar{b} = (5; -1; 1).$$

18. Дан $\triangle ABC$: $A(-3; 1; -2)$, $B(1; 3; 2)$, $C(4; 5; 4)$. Найти площадь $\triangle ABC$ и длину высоты, опущенной из вершины C .

19. Даны векторы $\bar{a} = (2; 1; -3)$ и $\bar{b} = (1; -2; -1)$. Найти $\|(2\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + 3\bar{b})\|$.

20. Даны вершины пирамиды: $A(-4; -1; 2)$, $B(1; 3; 2)$, $C(2; 2; 5)$, $D(3; 0; 1)$. Найти площади всех граней.

21. Упростить $(\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}) \times \bar{i} + (2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}) \times \bar{i}$.

22. Упростить $(3\bar{i} - 4\bar{j} \times \bar{k} + 2\bar{i} \times \bar{j}) \times (2\bar{i} - 3\bar{j})$.

23. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = (2; -1; 0)$, $\bar{b} = (3; 2; -1)$, $\bar{c} = (-2; 4; 2)$.

24. Найти объем пирамиды с вершинами в точках $A(-2; 1; 3)$, $B(-1; -2; 1)$, $C(-2; 1; 2)$, $D(4; 2; -2)$ и длину высоты, опущенной из точки D .

25. Установить, лежат ли в одной плоскости точки $A(1; 1; 0)$, $B(4; 2; 3)$, $C(-1; 2; 5)$, $D(-1; 0; 2)$.

26. Найти вектор \bar{x} , коллинеарный вектору $\bar{a} = (4; 2; 4)$ и удовлетворяющий условию $\bar{x} \cdot \bar{a} = 180$.

27. Даны векторы $\bar{a} = (3; -1; 5)$, $\bar{b} = (1; 2; -3)$. Найти вектор \bar{x} , перпендикулярный к оси OZ и удовлетворяющий условиям: $\bar{x} \cdot \bar{a} = 9$, $\bar{x} \cdot \bar{b} = -4$.

28. Даны точки $A(5; 1; -2)$, $B(4; -2; 3)$, $C(0; 3; 2)$. Найти единичный вектор, ортогональный векторам \overline{AB} и \overline{AC} .

29. Вычислить длины диагоналей параллелограмма $ABCD$, если $\overline{AB} = 2\bar{a} - \bar{b}$, $\overline{AD} = \bar{a} + 3\bar{b}$, $\|\bar{a}\| = 3$, $\|\bar{b}\| = 2$, $\bar{a}, \bar{b} = \frac{\pi}{3}$.

30. Векторы \bar{a} и \bar{b} ортогональны. Зная, что $\|\bar{a}\| = 3$, $\|\bar{b}\| = 4$, найти $\|(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})\|$ и $\|(3\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b})\|$.

1.7. Комплексные числа

Комплексные числа применяются, в частности, для решения квадратных уравнений. Так, оставаясь в области множества действительных чисел, невозможно решить квадратное уравнение, дискриминант которого меньше нуля.

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y - действительные числа, i - мнимая единица.

Число x называется *действительной частью* числа z и обозначается $\operatorname{Re}(z)$, а число y - *мнимой частью* числа z и обозначается $\operatorname{Im}(z)$, т.е. $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$.

Действительное число x является частным случаем комплексного $z = x + iy$ при $y = 0$. Комплексные числа вида $z = x + iy$, не являющиеся действительными (т.е. при $y \neq 0$), называются *мнимыми*, а при $x = 0$, $y \neq 0$, т.е. числа вида $z = iy$ - *чисто мнимыми*.

Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются *сопряженными*. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, т.е. $z_1 = z_2$, если $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$, $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$. В частности $z = 0$, если $\operatorname{Re}(z) = 0$ и $\operatorname{Im}(z) = 0$.

Арифметические операции на множестве комплексных чисел определяются следующим образом:

1. Сложение (вычитание) комплексных чисел:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

2. Умножение комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

В частности, $i^2 = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$

3. Деление двух комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}, (z_2 \neq 0)$$

Пример 23. Даны два комплексных числа $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 - 5i$. Найти $z_1 + z_2$,

$$z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 + 3i) + (3 - 5i) = (2 + 3) + (3 - 5)i = 5 - 2i, \\ z_1 - z_2 &= (2 + 3i) - (3 - 5i) = (2 - 3) + i(3 + 5) = -1 + 8i, \\ z_1 \cdot z_2 &= (2 + 3i) \cdot (3 - 5i) = (2 \cdot 3 + 3 \cdot 5) + i(2(-5) + 3 \cdot 3) = 21 - i, \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{3-5i}.$$

Умножая числитель и знаменатель на сопряженное делителю комплексное число $3+5i$, получаем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+3i) \cdot (3+5i)}{(3-5i) \cdot (3+5i)} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 3i + 2 \cdot 5i + 3 \cdot 5i^2}{9 - 25i^2} = \frac{21+19i}{34} = \frac{21}{34} + \frac{19}{34}i. \blacksquare$$

Пример 24. Решить квадратное уравнение $x^2 - 2x + 37 = 0$.

Решение.

Используя, хорошо известную формулу нахождения корней квадратного уравнения, получим:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-148}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-144}}{2} = \frac{2 \pm 12i}{2} = 1 \pm 6i.$$

Проверить правильность решения можно с помощью теоремы Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = 37 \end{cases}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= (1+6i) + (1-6i) = 2 \\ x_1 \cdot x_2 &= (1+6i) \cdot (1-6i) = 1^2 - (6i)^2 = 1 + 36 = 37. \blacksquare \end{aligned}$$

Если для геометрического изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для представления комплексных чисел служат точки координатной плоскости xOy .

Плоскость называется *комплексной*, если каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точка плоскости $z(x, y)$, причем это соответствие взаимно однозначное. Оси Ox и Oy , на которых расположены действительные числа $z = x + 0i = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$, называются соответственно *действительной* и *мнимой осями* (рис. 4).

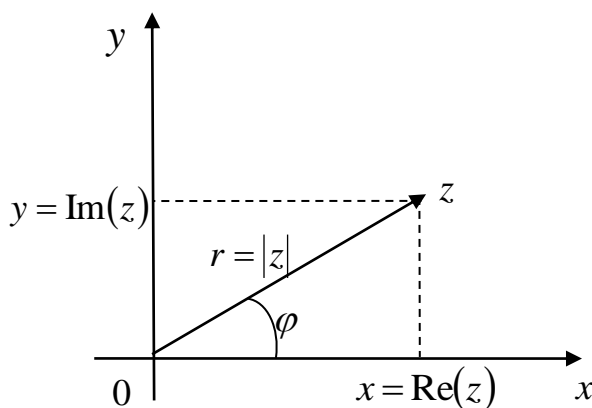


Рис. 4

С каждой точкой $z(x, y)$ комплексной плоскости связан радиус-вектор этой точки \overline{Oz} , длина которого r называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол φ , образованный радиус-вектором \overline{Oz} с осью Ox , называется аргументом комплексного числа z и обозначается $Argz$: $\varphi = Argz$.

Очевидно, что

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi.$$

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно представить как:

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Данное представление комплексного числа, где $r = |z| \geq 0$, $\varphi = Argz$, называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Решить квадратные уравнения

1. $x^2 + 1 = 0$,
2. $x^2 + 4 = 0$,
3. $x^2 + 16 = 0$
4. $x^2 + 20 = 0$,
5. $x^2 - 4x + 13 = 0$,
6. $x^2 + 2x + 5 = 0$,
7. $x^2 - 4x + 8 = 0$.
8. $x^2 + 6x + 25 = 0$.

Построить на комплексной плоскости

9. $|z| = 3$,
10. $|z| = 7$,
11. $\arg z = \frac{\pi}{3}$,
12. $\arg z = \frac{\pi}{4}$,
13. $z = 2 + i$,
14. $z = 4 - 3i$

Даны комплексные числа z_1 и z_2 . Найти: а) $z_1 + z_2$, б) $z_1 - z_2$, в) $z_1 \cdot z_2$, д) $\frac{z_1}{z_2}$.

15. $\begin{matrix} z_1 = 3 + 4i \\ z_2 = 2 - 3i \end{matrix}$,
16. $\begin{matrix} z_1 = 5 + 2i \\ z_2 = 7 + i \end{matrix}$,
17. $\begin{matrix} z_1 = 4 + 3i \\ z_2 = 6 - 2i \end{matrix}$,
18. $\begin{matrix} z_1 = 2 + 4i \\ z_2 = 3 + 5i \end{matrix}$

Найти $|z|$

19. $z = -\sqrt{5} + 4i$,
20. $z = 1 - \sqrt{3} \cdot i$,
21. $z = z_1 - z_2$, где $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 9 - 5i$
22. $z = z_1 \cdot z_2$, где $z_1 = 6 + 2i$, $z_2 = 5 + 3i$

Найти $\varphi = \operatorname{Arg} z$

23. $z = 1 + \sqrt{3} \cdot i$

24. $z = 2 + 2i$

25. $z = 1 - \sqrt{3} \cdot i$

Решить уравнение

26. $x^4 - 1 = 0$

27. $x^4 - 16 = 0$

28. $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$

29. $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

30. $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

ЧАСТЬ 2. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

2.1. Прямая в пространстве R^2

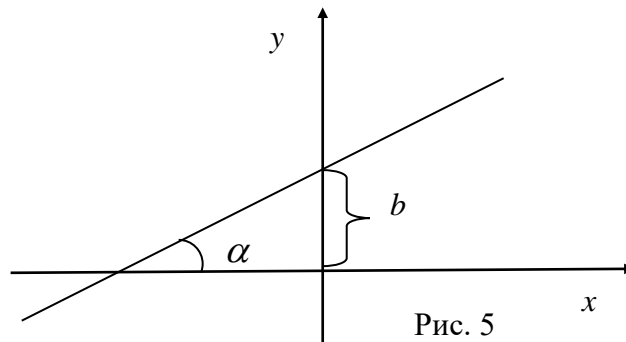
Всякая прямая в R^2 определяется уравнением первой степени относительно переменных x и y и, наоборот, каждое линейное уравнение

$$Ax + By + C = 0 \quad (2.1)$$

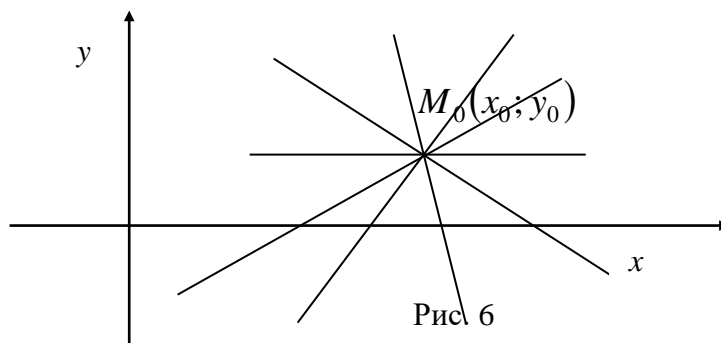
выражает прямую линию. Уравнение (2.1) называется общим уравнением прямой. Любая неvertикальная прямая описывается также уравнением

$$y = kx + b,$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$ - угловой коэффициент прямой, а b - отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат (рис. 5)



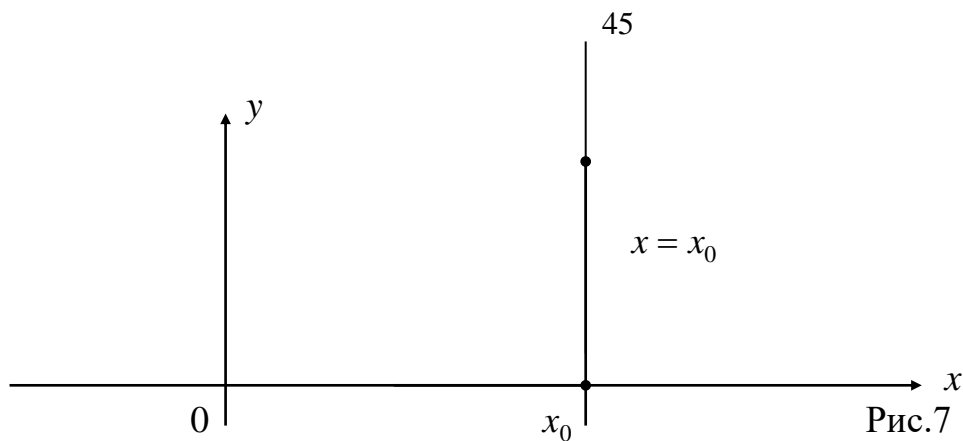
Совокупность прямых, проходящих через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ называется пучком прямых (рис.6).



Пучок прямых имеет уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (2.2)$$

Каждая прямая пучка обладает своим угловым коэффициентом. В частности, для горизонтальной прямой $k=0$; поэтому ее уравнение: $y = y_0$. Пучок не содержит вертикальной прямой, уравнение которой $x = x_0$ (рис.7).



Угол θ между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

если $1 + k_1 k_2 \neq 0$. Равенство $1 + k_1 k_2 = 0$, т.е. $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ является условием перпендикулярности двух прямых. Условие параллельности двух прямых:

$$k_1 = k_2.$$

2.1.1. Нахождение углового коэффициента по двум точкам

Если известны две точки на прямой $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то угловой коэффициент k этой прямой вычисляется по следующей формуле:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (2.3)$$

2.1.2. Координаты середины отрезка

Пусть известны координаты концов отрезка: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Тогда точка O - середина отрезка AB находится следующим образом:

$$O\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Пример 25. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;5)$ и $B(-1;7)$.

Решение. Запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку A , воспользовавшись формулой (2.2):

$$y - 5 = k(x - 3).$$

Остается найти угловой коэффициент прямой AB , применяя формулу (2.3):

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - 5}{-1 - 3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Таким образом, уравнение прямой AB выглядит так:

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

или, после упрощений,

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}. \blacksquare$$

Пример 26. (Образец выполнения задачи 5 из контрольной работы).

Даны вершины треугольника $A(1;1)$, $B(-3;5)$, $C(3;7)$. Найти

- уравнение стороны AB ;
- уравнение высоты AH ;
- уравнение медианы BM ;
- точку пересечения высоты AH и медианы BM .

Решение. а) Уравнение пучка прямых, проходящих через точку A :

$$y - 1 = k(x - 1).$$

Находим угловой коэффициент прямой AB по двум заданным точкам

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 1}{-3 - 1} = \frac{4}{-4} = -1,$$

$$(AB): y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2.$$

б) Используем уравнение пучка того же, что и в пункте а):

$$y - 1 = k(x - 1).$$

Для нахождения углового коэффициента высоты AH воспользуемся условием перпендикулярности прямых (рис. 8):

$$k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}}$$

$$k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{7 - 5}{3 - (-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

значит, $k_{AH} = -3$, и тогда

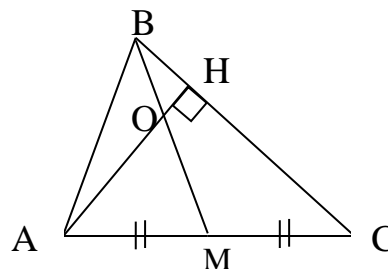


Рис. 8

$$(AH): y - 1 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 4$$

с) Для нахождения медианы BM используем уравнение пучка прямых, проходящих через точку B :

$$y - 5 = k(x + 3)$$

Найдем точку M . Т.к. M - середина отрезка AC , то $M\left(\frac{1+3}{2}; \frac{1+7}{2}\right)$, т.е. $M(2;4)$. Тогда

$$k_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{4-5}{2+3} = -\frac{1}{5},$$

$$(BM): y - 5 = -\frac{1}{5}(x + 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{22}{5}.$$

d) Для того, чтобы найти точку пересечения прямых AN и BM (назовем эту точку O), следует решить систему:

$$\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{22}{5} \end{cases} \Rightarrow -3x + 4 = -\frac{1}{5}x + \frac{22}{5} \Rightarrow -\frac{14}{5}x = \frac{2}{5} \Rightarrow x = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7},$$

$$y = -3\left(-\frac{1}{7}\right) + 4 = \frac{3}{7} + 4 = \frac{31}{7}.$$

Таким образом, $O\left(-\frac{1}{7}; \frac{31}{7}\right)$. ■

Пример 27 (Образец выполнения задачи 6 из контрольной работы). Построить многоугольник и вычислить значение функции z в его вершинах:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y = x + 4 \\ y = -2x + 27 \end{cases} \quad z = 2x + 3y.$$

Решение. Построим данные в условии прямые (рис.9): $x = 0$ – уравнение оси Oy ;

$y = 0$ – уравнение оси Ox ; $y = x + 4$.

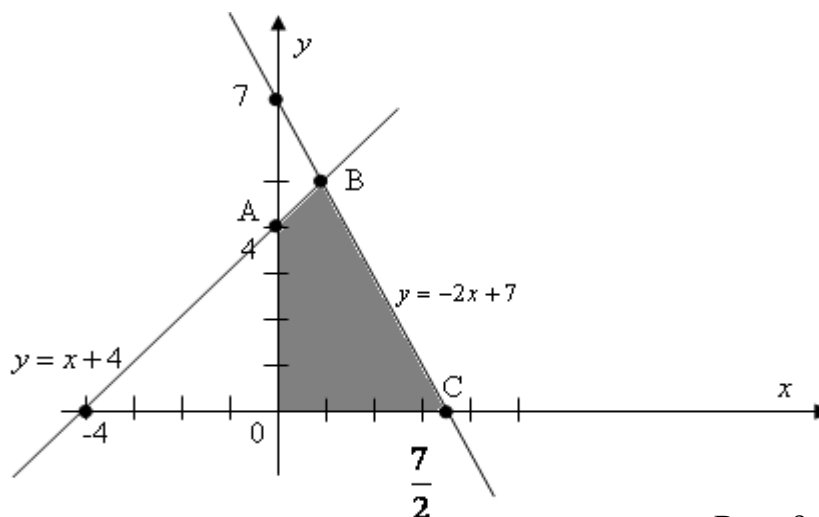


Рис. 9

Для того, чтобы построить прямую, достаточно взять две точки: $x = 0 \Rightarrow y = 4$, $y = 0 \Rightarrow x = -4$, т.е. прямая $y = x + 4$ проходит через точки $(0;4)$ и $(-4;0)$. Прямая $y = -2x + 7$ проходит через точки $(0;7)$ и $(\frac{7}{2};0)$.

Итак, мы получили многоугольник $OABC$. Координаты вершин O, A, C мы знаем, а координаты вершины B найдем, решая систему

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -2x + 7 \end{cases} : x + 4 = -2x + 7 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 5.$$

т.е. $B(1;5)$.

Вычислим значения функции $z = 2x + 3y$ в полученных вершинах многоугольника:

$$\begin{aligned} z \Big|_{O(0;0)} &= 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0; & z \Big|_{A(0;4)} &= 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12; \\ z \Big|_{B(1;5)} &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 17; & z \Big|_{C(\frac{7}{2};0)} &= 2 \cdot \frac{7}{2} + 3 \cdot 0 = 7. \blacksquare \end{aligned}$$

2.2 Прямая в пространстве R^3

Пусть заданы вектор $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис. 10)

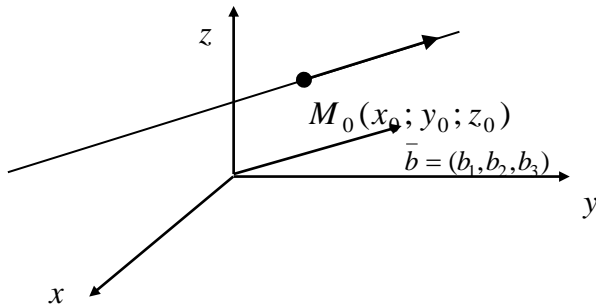


Рис. 10

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ имеют вид:

$$\begin{cases} x = b_1 t + x_0 \\ y = b_2 t + y_0 \\ z = b_3 t + z_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь x, y, z - координаты текущей точки M прямой, а t - параметр, принимающий все значения от $-\infty$ до $+\infty$. При этом существует взаимно однозначное соответствие между значениями t и точками прямой. Вектор \vec{b} называют *направляющим (или базисным) вектором* прямой.

Иногда используют также *канонические уравнения* прямой:

$$\frac{x-x_0}{b_1} = \frac{y-y_0}{b_2} = \frac{z-z_0}{b_3}.$$

Пример 28. (Образец выполнения задачи 7(а) из контрольной работы). Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $A(2;-4;5)$ и $B(4;1;-2)$.

Решение. В качестве направляющего возьмем вектор $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = (2;5;-7)$ (рис. 11),

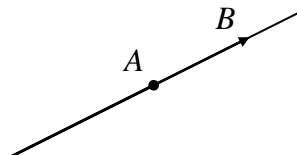


Рис. 11

а в качестве фиксированной точки – точку A и запишем искомые параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 5t - 4 \\ z = -7t + 5 \end{cases}, \quad -\infty < t < +\infty$$

Канонические уравнения данной прямой будут иметь вид:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-5}{-7}. \blacksquare$$

Пример 29. При каких α и β прямые

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -2t - 1 \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -9t + 5 \\ y = \alpha t + 7 \\ z = \beta t + 9 \end{cases}$$

параллельны? Составить уравнение прямой, параллельной данным и проходящей через точку $P(4;-4;3)$.

Решение. Прямые параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\vec{b}_1 = (3;-2;-1)$ и $\vec{b}_2 = (-9;\alpha;\beta)$ коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты пропорциональны

$$\frac{-9}{3} = \frac{\alpha}{-2} = \frac{\beta}{-1},$$

откуда $\alpha = 6, \beta = 3$. Прямая, параллельная данным и проходящая через точку $P(4; -4; 3)$, имеет тот же направляющий вектор $(3; -2; -1)$; ее параметрические уравнения таковы

$$\begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = -2t - 4 \\ z = -t + 3 \end{cases}, \quad -\infty < t < +\infty. \quad \blacksquare$$

2.3 Плоскость

Вектором нормали к плоскости называется вектор, перпендикулярный к этой плоскости. Уравнение плоскости по точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и заданному вектору нормали $\vec{N} = (A; B; C)$ (рис. 12)

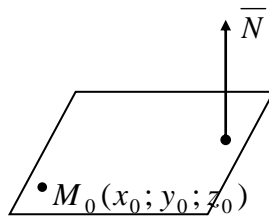


Рис. 12

имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (2.5)$$

Это линейное уравнение относительно переменных x, y, z . Верно и обратное: всякое линейное уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.6)$$

выражает плоскость, причем коэффициенты при переменных являются координатами вектора нормали \vec{N} этой плоскости. Данное уравнение называется *общим уравнением* плоскости.

Пример 30. (Образец выполнения задачи 7(b) из контрольной работы). Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3; 2; 1), B(-2; 5; 2)$ и $C(4; 0; 1)$.

Решение. Из точки A выпустим два вектора \vec{AB} и \vec{AC} . Тогда в качестве нормали искомой плоскости можно взять векторное произведение векторов \vec{AB} и \vec{AC} (рис. 13),

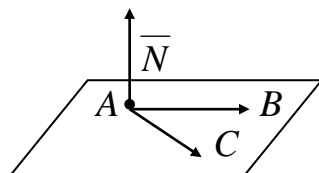


Рис. 13

т.к. \overline{N} перпендикулярен вектору \overline{AB} , вектору \overline{AC} , а значит и плоскости, в которой они лежат.

$$\overline{AB} = (-5; 3; 1), \quad \overline{AC} = (1; -2; 0).$$

$$\overline{N} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + \bar{j} + 7\bar{k} = (2; 1; 7).$$

Запишем уравнение искомой плоскости по вектору нормали $\overline{N} = (2; 1; 7)$ и, например, точке $A(3; 2; 1)$:

$$2 \cdot (x - 3) + 1 \cdot (y - 2) + 7(z - 1) = 0.$$

Окончательно, после упрощений, имеем:

$$2x + y + 7z - 15 = 0.$$

Полученный результат следует повторить, подставляя в уравнение координаты точек A, B и C :

$$\begin{aligned} A(3; 2; 1): \quad & 2 \cdot 3 + 2 + 7 \cdot 1 - 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{верно} \\ B(-2; 5; 2): \quad & 2 \cdot (-2) + 5 + 7 \cdot 2 - 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{верно} \\ C(4; 0; 1): \quad & 2 \cdot 4 + 0 + 7 \cdot 1 - 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{верно.} \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 31. (Образец выполнения задачи 7(с) из контрольной работы). Найти параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(3; 2; 1)$ перпендикулярно плоскости

$$2x + y + 7z - 15 = 0.$$

Решение. Т.к. искомая прямая перпендикулярна к плоскости, то ее направляющий вектор \overline{b} совпадет с вектором нормали плоскости \overline{N} (рис. 14):

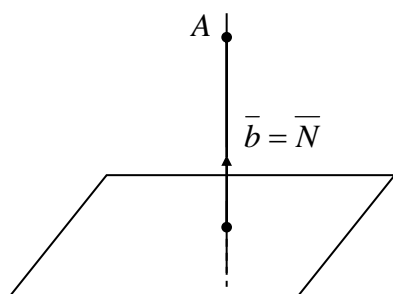


Рис.14

$$\overline{b} = \overline{N} = (2; 1; 7).$$

Осталось лишь записать искомые уравнения прямой, используя формулы (2.4):

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t + 2 \\ z = 7t + 1 \end{cases}, \quad -\infty < t < +\infty. \blacksquare$$

Анализ общего уравнения плоскости и построение плоскостей

Рассмотрим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Равенство нулю отдельных коэффициентов в общем уравнении вносит особенности в расположение плоскости:

$D = 0$ означает, что плоскость проходит через начало координат;

$A = 0$ свидетельствует о том, что плоскость параллельна оси Ox ;

$B = 0$ - параллельна оси Oy ;

$C = 0$ - параллельна оси Oz ;

$A = 0, D = 0$ - плоскость проходит через ось Ox ;

$B = 0, D = 0$ - плоскость проходит через ось Oy ;

$C = 0, D = 0$ - плоскость проходит через ось Oz ;

$A = 0, B = 0$ - плоскость параллельна плоскости xOy ;

$A = 0, C = 0$ - плоскость параллельна плоскости xOz ;

$B = 0, C = 0$ - плоскость параллельна плоскости yOz .

Пример 32. (Образец выполнения задачи 8 из контрольной работы). Построить плоскости

a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$;

b) $x + 2y - 8 = 0$;

c) $z - 3 = 0$.

Решение. а) В этом уравнении ни один из коэффициентов не равен нулю. Отметим три точки, лежащие в данной плоскости (рис. 15):

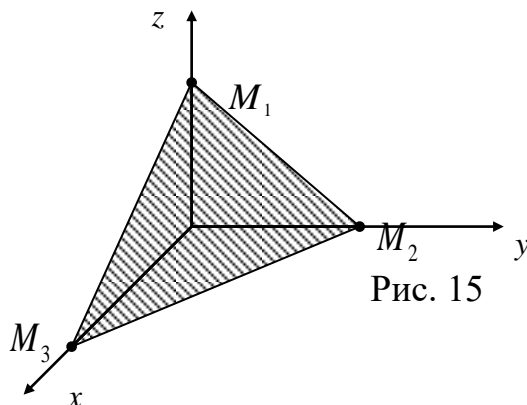


Рис. 15

если $x = 0$ и $y = 0$, то $z = 3$, т.е. $M_1(0;0;3)$;

если $x = 0$ и $z = 0$, то $y = 4$, т.е. $M_2(0;4;0)$;

если $y = 0$ и $z = 0$, то $x = 6$, т.е. $M_3(6;0;0)$.

Теперь через эти точки проводим плоскость.

б) Т.к. в уравнении плоскости $C = 0$, то данная плоскость параллельна оси Oz . Определим две точки, лежащие в данной плоскости:

$$M_1(8;0;0), \quad M_2(0;4;0).$$

Через эти точки проводим прямую M_1M_2 , а через нее – плоскость параллельно оси Oz (рис.16).

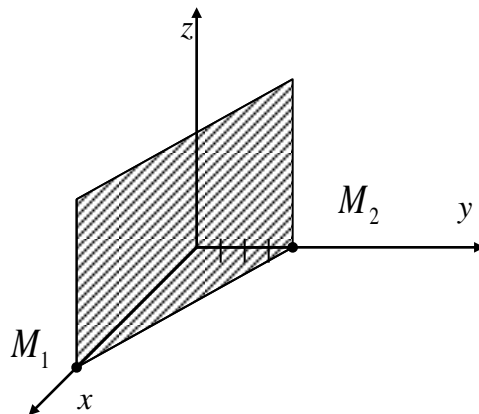


Рис. 16

с) В этом уравнении $A = 0$ и $B = 0$. Значит, данная плоскость параллельна плоскости xOy . Отметим точку, лежащую в данной плоскости:

$$M_1(0;0;3).$$

Проводим через нее плоскость параллельно плоскости xOy (рис.17). ■

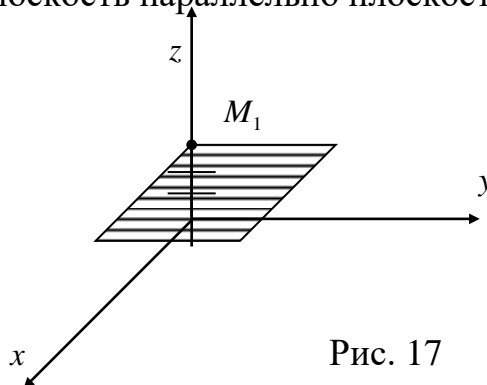


Рис. 17

2.4. Взаимное расположение прямой и плоскости

Точка пересечения прямой

$$\begin{cases} x = b_1t + x_0 \\ y = b_2t + y_0 \\ z = b_3t + z_0 \end{cases}$$

и плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

находится решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x = b_1 t + x_0 \\ y = b_2 t + y_0 \\ z = b_3 t + z_0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Здесь возможны три случая:

1) $Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 \neq 0$. Тогда существует единственная точка пересечения прямой и плоскости.

2) $\begin{cases} Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$ - прямая параллельна плоскости.

3) $\begin{cases} Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$ - прямая лежит в плоскости.

Пример 33. (Образец выполнения задачи 7(d) из контрольной работы).

Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t - 2 \end{cases}$ с плоскостью $5x - 3y - 4z - 5 = 0$.

Решение. Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t - 2 \\ 5x - 3y - 4z - 5 = 0. \end{cases}$$

Подставляя параметрические уравнения прямой в уравнение плоскости, получим

$$5(3t - 4) - 3(-t + 1) - 4(2t - 2) - 5 = 0,$$

откуда $t = 2$. Это значение параметра, соответствующее точке пересечения прямой и плоскости. Чтобы найти координаты этой точки пересечения, следует $t = 2$ поставить в параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = 3 \cdot 2 - 4 \\ y = -2 + 1 \\ z = 2 \cdot 2 - 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = -1, z = 2. \blacksquare$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

- 1) Определить точки пересечения прямой $2x - 3y - 12 = 0$ с координатными осями.
- 2) Составить уравнение прямой, проходящей через две точки:
 - a) $A(1;3)$, $B(-1;7)$;
 - b) $A(4;1)$, $B(0;6)$;
 - c) $A(5;2)$, $B(-2;2)$;
 - d) $A(3;0)$, $B(3;5)$.
- 3) Даны вершины треугольника: $A(2;0), B(-1;4), C(5;1)$. Найти уравнения всех сторон.
- 4) Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(5;-2)$:
 - a) параллельно прямой $3x - 4y + 1 = 0$;
 - b) перпендикулярно прямой $2x - 3y + 4 = 0$;
 - c) параллельно оси ординат;
 - d) перпендикулярно оси Oy .
- 5) Найти точки пересечения и углы между прямыми:
 - a) $2x - 5y - 1 = 0$ и $4x + 3y + 2 = 0$;
 - b) $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + 2y - 7 = 0$.
- 6) Через точку пересечения прямых $y = 5x - 1$ и $2x + 3y - 4 = 0$ провести прямую, параллельную прямой $5x - y = 0$.
- 7) Через точку пересечения прямых $2x - 4y + 1 = 0$ и $x + 2y - 3 = 0$ провести прямую, перпендикулярную к оси Ox .
- 8) Составить уравнение прямых, проходящих через точку $M(2;3)$ под углом 45° к прямой $5x + 2y - 4 = 0$.
- 9) Даны концы отрезка AB : $A(-1;2), B(7;0)$. Найти уравнение серединного перпендикуляра.
- 10) Даны вершины треугольника: $A(2;3), B(4;-1), C(0;2)$. Найти уравнение средней линии, параллельной стороне BC .
- 11) Даны вершины треугольника: $A(0;1), B(-3;2), C(5;5)$. Найти уравнение медианы AM и высоты CH .
- 12) Даны вершины треугольника: $A(-2;1), B(4;3), C(0;7)$. Найти точку пересечения медиан.
- 13) Даны вершины треугольника: $A(3;3), B(-1;4), C(5;2)$. Найти точку пересечения высот.
- 14) Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин $A(2;-3)$. Составить уравнения двух других сторон прямоугольника.
- 15) Найти проекцию точки $A(2;3)$ на прямую, проходящую через точки $B(1;5)$ и $C(-3;-1)$.

16) Найти точку B , симметричную точке $A(-1;4)$, относительно прямой $2x - 3y + 1 = 0$.

17) Найти расстояние между параллельными прямыми $y = 3x + 1$ и $y = 3x - 5$

18) Зная координаты двух вершин ромба $A(0;4)$ и $B(2;3)$ и уравнение CD : $x + 2y - 3 = 0$, найти координаты остальных вершин.

19) Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки:

a) $A(1;2;3)$, $B(0;4;-1)$

b) $A(3;0;2)$, $B(3;5;1)$

20) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-4;1)$ параллельно прямой:

$$\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -3t \\ z = 5t + 4 \end{cases}.$$

21) Выяснить взаимное расположение прямых

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 5t - 2 \\ z = t + 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 4 \\ z = 7t \end{cases}.$$

22) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5;-2;1)$ перпендикулярно к прямой

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 5t + 3 \\ z = -4t + 5 \end{cases}.$$

23) Найти уравнение плоскости по трем известным точкам:

a) $A(1;0;3)$, $B(4;-1;2)$, $C(-1;2;4)$,

b) $A(3;-1;2)$, $B(5;0;2)$, $C(4;3;2)$.

24) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2;1;5)$ и пря-

мую $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 5t \\ z = 4 \end{cases}$.

25) Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t - 3 \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 4t \\ z = -t + 5 \end{cases}.$$

26) Выяснить, являются ли прямые

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 3t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3t \\ y = -t - 1 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$$

пересекающимися и если да, то найти уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

27) Построить плоскости:

a) $4x + 3y + 2z - 12 = 0$;

b) $2x + 5z - 10 = 0$;

c) $4y - z + 8 = 0$;

d) $5x - 3y = 0$;

e) $z - 5 = 0$.

28) Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 4 \\ z = t + 2 \end{cases}$ с плоскостью

$$5x - y + 2z - 1 = 0.$$

30) Найти проекцию точки $A(3; -1; 8)$ на прямую $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 5 \\ z = 3t + 7 \end{cases}$.

31) Найти точку, симметричную точке $A(3; 1; 2)$ относительно плоскости $5x - 2y + z - 15 = 0$

32) Найти точку, симметричную точке $A(2; -1; 4)$ относительно прямой

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 4 \end{cases}.$$

33) Найти параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z + 7 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 9 = 0 \end{cases}.$$

34) Найти расстояние между параллельными плоскостями: $2x - y + 4z - 7 = 0$ и $2x - y + 4z - 11 = 0$.

35) Найти расстояние между параллельными прямыми:

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 3 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases}.$$

36) Доказать, что линия пересечения плоскостей $5x - 3y + 2z - 5 = 0$ и $2x - y - z - 1 = 0$ лежит в плоскости $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

2.5 Кривые второго порядка

Кривые второго порядка описываются уравнениями второй степени с двумя неизвестными.

Эллипсом называется линия (рис.18), которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ при условии } a \geq b.$$

Точки пересечения эллипса с осями координат $(a;0)$, $(-a;0)$, $(0;b)$ и $(0;-b)$ называются *вершинами эллипса*.

Расстояние от начала координат до вершин a и b называются, соответственно, *большой и малой полуосями* эллипса.

Фокусами называются точки $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, где $c^2 = a^2 - b^2$ и $c \geq 0$.

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса, причем для эллипса $\varepsilon < 1$ всегда. Начало координат называется *центром* эллипса.

С эллипсом связаны две замечательные прямые, называемые его *директрисами*. Их уравнения имеют вид: $x = \frac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\frac{a}{\varepsilon}$.

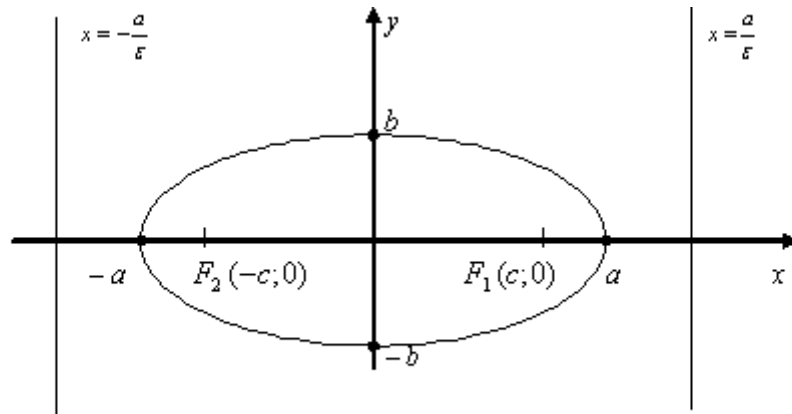


Рис. 18

Частным случаем эллипса является окружность. Она задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

где (x_0, y_0) - координаты центра окружности, а R - радиус окружности.

Гиперболой называется линия (рис. 19), которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ось абсцисс пересекает гиперболу в точках $(a;0)$ и $(-a;0)$, называемых *вершинами* гиперболы.

Ось ординат не пересекает гиперболу.

Числа a и b называются, соответственно, *вещественной и мнимой полуосями* гиперболы. Прямые $y = \frac{bx}{a}$ и $y = -\frac{bx}{a}$ называются *асимптотами* гиперболы.

Гипербола состоит из двух отдельных кусков, называемых ее *ветвями*. Начало координат называется *центром* гиперболы.

Фокусами гиперболы называются точки $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, где $c^2 = a^2 + b^2$ и $c > 0$.

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом*. У гиперболы всегда $\varepsilon > 1$.

Директрисы гиперболы определяются уравнениями $x = \frac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\frac{a}{\varepsilon}$.

Директрисы гиперболы лежат ближе к центру, чем вершины и не пересекают гиперболу.

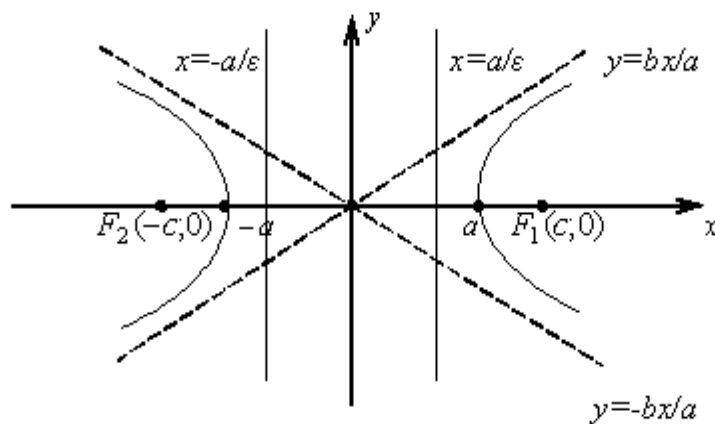


Рис. 19

Параболой называется линия (рис. 20), которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

$$y^2 = 2px,$$

при условии $p > 0$.

Эта парабола проходит через начало координат. Эта точка называется *вершиной* параболы.

Фокусом параболы называется точка $F(p/2;0)$.

Директрисой параболы называется прямая, задаваемая уравнением $x = -\frac{p}{2}$.

Параболе приписывается *эксцентриситет* $\varepsilon = 1$.

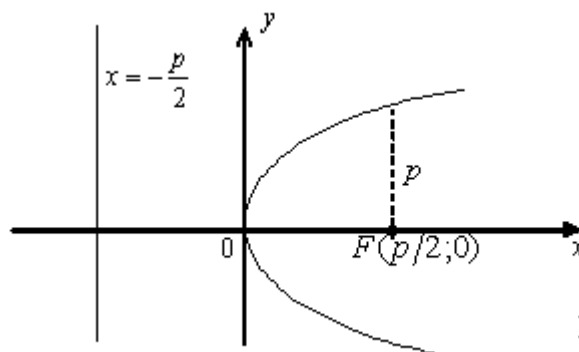


Рис. 20

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

- 1) Какая кривая определяется уравнением $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$? Определить, чему равны большая и меньшая ее полуоси.
- 2) Определить, какая кривая задана уравнением $16x^2 - 9y^2 = 144$ и чему равны ее большая и меньшая полуоси.
- 3) Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 - 2y = 0$.
- 4) Найти фокус и директрису параболы $y^2 = 24x$.
- 5) Кривая задана уравнением $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:
 - а) полуоси, б) фокусы, в) эксцентриситет, г) уравнения директрис.
- 6) Дана гипербола $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$. Найти:
 - а) координаты центра, б) координаты вершин, в) эксцентриситет.
- 7) Определить полуоси, координаты фокусов и расстояние между фокусами эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$.
- 8) Найти уравнения асимптот и директрис гиперболы $x^2 - 4y^2 = 16$.
- 9) Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что:
 - а) его полуоси равны 5 и 2;
 - б) его большая полуось равна 10, а расстояние между фокусами равно 8.
- 10) Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
 - а) ее оси равны 10 и 8;
 - б) расстояние между фокусами равно 10 и большая ось равна 8;
 - в) расстояние между фокусами равно 6 и $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Задача 1. Решить систему линейных уравнений двумя способами: методом Крамера и матричным методом.

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 4 \\ 3x - ay + 4z = b + 1 \\ -x + 5y + z = a - b \end{cases}$$

Задача 2. Проверить справедливость равенств $\Delta(AB) = \Delta(BA) = \Delta(A) \cdot \Delta(B)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b & 1 \\ -1 & 4 & a \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -a & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & b \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Даны векторы: $\vec{a} = (1; 3; a)$, $\vec{b} = (2; b; -1)$, $\vec{c} = (-3; a; b)$. Определить, образуют ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базис в пространстве R^3 . Если да, то разложить вектор $\vec{d} = (5; 0; 4)$ по этому базису.

Задача 4. Даны вершины пирамиды $ABCD$: $A(2; a-1; 0)$, $B(3; 1; b-4)$, $C(-1; 5; b-a)$, $D(a; 2; 3)$. Найти:

- длину ребра BD ;
- угол между ребрами AB и AC ;
- площадь грани BCD ;
- объем пирамиды.

Задача 5. Даны вершины треугольника ABC : $A(a; 1)$; $B(a-1; 5)$; $C(2; b+6)$. Найти:

- уравнение стороны AB ;
- уравнение высоты AH ;
- уравнение медианы BM ;
- точку пересечения высоты AH и медианы BM .

Задача 6. Построить многоугольник и вычислить значения функции z в его вершинах:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ y = (a+1)x + 2, \\ -(b+2)x + 8. \end{cases} \quad z = (a+3)x + (b-2)y.$$

Задача 7. Даны точки: $A(1; 0; a)$, $B(3; b; 1)$, $C(-2; 1; a+4)$, $D(5; 2; b-a)$. Найти:

- канонические и параметрические уравнения прямой AB ;
- уравнение плоскости α , проходящей через точки A, B и C ;

с) параметрические уравнения прямой l , проходящей через точку D перпендикулярно к плоскости α ;

д) точку пересечения прямой l и плоскости α .

Задача 8. Построить плоскости:

а) $x + 2y + (a + 1)z - 10 = 0$;

б) $(b + 1)x + 4y - 12 = 0$;

с) $3x - (b + 2)z = 0$;

д) $(a + 2)y - 15 = 0$.

Пояснение Числа a и b выбираются студентом по его зачетной книжке (или студенческому билету):

a – это последняя цифра в “зачетке”,

b – это предпоследняя цифра в “зачетке”.

Желаем Вам успехов!

Матрицы и определители

Определитель 2^{го} порядка: $\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

3^{го} порядка: $\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$

Обратная матрица: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$

Векторы

Скалярное произведение: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n, \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi.$

Векторное произведение: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$

Смешанное произведение: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$

Комплексные числа

Сложение комплексных чисел: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$

Умножение комплексных чисел: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$

Деление двух комплексных чисел: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}, (z \neq 0).$

Прямые и плоскости

Уравнение прямой в \mathbb{R}^2 : $y - y_0 = k(x - x_0), \text{ где } k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Параметрические уравнения прямой в \mathbb{R}^3 : $\begin{cases} x = b_1 t + x_0 \\ y = b_2 t + y_0 \\ z = b_3 t + z_0 \end{cases}.$

Уравнение плоскости: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$

Кривые второго порядка

Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, **гипербола:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; **парабола:** $y^2 = 2px.$